

Model Implementasi Kuantum untuk Jaringan Syaraf Tiruan

Ammar Daskin

Departemen Teknik Komputer, Istanbul Medeniyet University, Istanbul, Turki. E-mail: adaskin25@gmail.com

Editor: George Svetlichny, Danko Georgiev & Chris C. King

Riwayat artikel: Diajukan pada 12 Oktober 2017; Diterima pada 30 Januari 2018; Diterbitkan pada 20 Februari 2018.

Troses pembelajaran untuk jaringan syaraf tiruan berlapis-lapis dengan banyak node menuntut sumber daya komputasi yang besar.

Dalam beberapa jaringan syaraf tiruan

Pada model jaringan, rumus pembelajaran, seperti rumus Widrow-Hoff, tidak mengubah vektor eigen dari matriks bobot sambil meratakan nilai eigen. Dalam waktu tak terhingga, rumus-rumus iteratif ini menghasilkan suku-suku yang dibentuk oleh komponen-komponen utama matriks bobot, yaitu vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang tidak nol. Dalam komputasi kuantum, algoritma estimasi fase dikenal untuk memberikan kecepatan lebih dari algoritma konvensional untuk masalah yang berhubungan dengan nilai eigen. Menggabungkan penguatan amplitudo kuantum dengan algoritma estimasi fase, sebuah model implementasi kuantum untuk jaringan syaraf tiruan menggunakan aturan pembelajaran Widrow-Hoff disajikan. Kompleksitas model ditemukan linier dalam ukuran matriks bobot. Hal ini memberikan peningkatan kuadrat atas algoritma klasik.


Quanta 2018; 7: 7-18.

1 Pendahuluan

Jaringan syaraf tiruan [1-3] adalah model statistik adaptif yang meniru struktur syaraf otak manusia untuk menemukan solusi optimal untuk masalah multivariat. Dalam desain jaringan syaraf tiruan ditentukan hal-hal berikut: struktur jaringan, variabel input-output, aturan aktivasi lokal, dan algoritma pembelajaran. Algoritma pembelajaran umumnya terkait dengan aktivitas neuron dan menggambarkan fungsi biaya matematis. Seringkali, minimalisasi fungsi biaya yang terdiri dari bobot dan bias menggambarkan proses pembelajaran dalam jaringan saraf tiruan. Selain itu, aturan pembelajaran dalam proses ini menentukan bagaimana bobot sinapsis harus diperbarui pada setiap iterasi. Secara umum, aturan pembelajaran dapat dikategorikan sebagai pembelajaran terawasi dan tidak terawasi: Dalam aturan pembelajaran terawasi, jarak antara respons neuron dan respons yang ditentukan, yang disebut target t , dipertimbangkan. Namun, hal ini tidak diperlukan dalam aturan pembelajaran tak terawasi. Aturan pembelajaran Hebbian [4] adalah contoh umum dari pembelajaran tak terawasi, dimana vektor bobot pada iterasi ke- $(j+1)$ diperbaharui dengan rumus berikut (kami akan mengikuti [2] untuk menjelaskan aturan pembelajaran):

$$\mathbf{w}_{[j+1]} = \mathbf{w}_{[j]} - \eta \mathbf{t} \mathbf{x}. \quad (1)$$

Di sini, \mathbf{x} adalah vektor input, η adalah konstanta pembelajaran positif dan $\mathbf{w}_{[j]}$ mewakili bobot pada iterasi ke- j . Dan t adalah respons target. Pembelajaran didefinisikan dengan mendapatkan output yang lebih dekat dengan respon target.

 Ini adalah artikel akses terbuka yang didistribusikan di bawah ketentuan Lisensi Atribusi Creative Commons CC-BY-3.0, yang mengizinkan penggunaan, distribusi, dan reproduksi tanpa batas dalam media apa pun, asalkan penulis asli dan sumbernya disebutkan.

Di sisi lain, aturan pembelajaran Widrow-Hoff [5], yang merupakan minat utama dari makalah ini, mengilustrasikan aturan pembelajaran yang diawasi secara umum [2, 3, 6]

$$\mathbf{w}_{[j+1]} = \mathbf{w}_{[j]} - \eta \sigma^j(v)(t - y)\mathbf{x}, \quad (2)$$

di mana $v = \mathbf{x}^T \mathbf{w}$ adalah aktivasi sel output dan $\sigma^j(v)$ adalah turunan dari fungsi aktivasi yang menentukan output dari sebuah sel pada jaringan yang dipertimbangkan, $y = \sigma(v)$: contohnya, fungsi sigmoid, $\sigma(v) = 1/(1+\exp(-v))$. Sementara pada iterasi Hebbian, vektor bobot digerakkan ke arah vektor input dengan jumlah yang sebanding dengan target, pada iterasi Widrow-Hoff, perubahannya sebanding dengan kesalahan $(t - y)$. Jika kita mempertimbangkan multi-neuron; aktivasi, output, dan nilai target menjadi vektor: yaitu, \mathbf{v} , \mathbf{y} , dan \mathbf{t} , masing-masing. Ketika ada beberapa input dan target, himpunan input, target, aktivasi, dan output dapat diwakili oleh matriks X , T , V , dan Y , secara berurutan. Kemudian, persamaan-persamaan di atas menjadi bentuk matriks sebagai berikut

$$W_{[j+1]} = W_{[j]} - \eta XT^T, \quad (3)$$

$$W_{[j+1]} = W_{[j]} - \eta(\sigma^j(V) \circ X)(T - Y)^T, \quad (4)$$

di mana W mewakili matriks bobot sinapsis.

Telah diketahui bahwa tugas pembelajaran untuk jaringan neural berlapis-lapis dengan banyak node menuntut sumber daya komputasi yang besar. Algoritma dalam model komputasi kuantum memberikan kecepatan komputasi yang lebih baik daripada algoritma klasik untuk beberapa masalah tertentu: misalnya, algoritma pemfaktoran Shor [7] dan algoritma pencarian Grover [8]. Dengan menggunakan komputasi kuantum adiabatik [9, 10] atau memetakan kumpulan data ke memori akses acak kuantum [11,12], kecepatan dalam analisis data besar telah terbukti dapat dilakukan [13-15]. Lebih lanjut, Lloyd dan kolaborator [16] telah menjelaskan versi kuantum untuk analisis komponen utama.

Dalam beberapa dekade terakhir, menghubungkan neuron-neuron dalam jaringan dengan qubit [17], beberapa jaringan kuantum yang berbeda yang analog dengan jaringan syaraf tiruan juga telah dikembangkan: mis. [18-23] (Untuk tinjauan lengkap dan daftar referensi, lihat [24]). Model-model ini tidak boleh disamakan dengan algoritma klasik (lih. [25, 26]) yang diilhami oleh komputasi kuantum. Selanjutnya, dengan menggunakan algoritma pencarian Grover [8], sebuah memori asosiatif kuantum diperkenalkan [27].

Meskipun ada beberapa hasil yang menjanjikan, masih

sebagai subkomponen dari algoritma lainnya. Sementara pada kasus umum, PEA membutuhkan estimasi awal yang baik dari vektor eigen untuk menghasilkan fase; dalam beberapa kasus, PEA mampu menemukan fase dengan menggunakan keadaan superposisi awal yang sama: misalnya, algoritma pemfaktoran Shor [7]. Dalam [29], ditunjukkan

bahwa register flag dapat digunakan dalam algoritma estimasi fase untuk menghilangkan bagian matriks yang tidak terkondisi dengan memproses nilai eigen yang lebih besar dari nilai ambang batas. Algoritma penguatan amplitudo [8, 30-32] digunakan untuk memperkuat amplitudo dari beberapa keadaan kuantum tertentu yang dipertimbangkan. Dalam definisi pembelajaran penguatan kuantum [33, 34], keadaan dan tindakan direpresentasikan sebagai keadaan kuantum. Dan berdasarkan pengamatan keadaan, hadiah diterapkan pada daftar yang mewakili tindakan. Kemudian, penguatan amplitudo kuantum diterapkan untuk memperkuat amplitudo keadaan yang diberi hadiah. Selain itu, dalam karya sebelumnya [35] yang menggabungkan penguatan amplitudo dengan algoritma estimasi fase, kami telah menunjukkan kerangka kerja untuk mendapatkan nilai eigen dalam interval yang diberikan dan vektor eigen yang sesuai dari keadaan superposisi awal yang sama. Kerangka kerja ini dapat digunakan sebagai cara

untuk melakukan analisis komponen utama kuantum

(QPCA). Untuk matriks bobot yang diberikan W ; dalam pengasosiasi otomatis linier

ada kebutuhan untuk penelitian lebih lanjut tentang model-model baru [24]. Algoritma estimasi fase kuantum (PEA)

[28] memberikan kecepatan komputasi dibandingkan algoritma klasik yang sudah dikenal dalam masalah yang berhubungan dengan nilai eigen. Algoritma ini terutama menemukan nilai fase dari nilai eigen dari matriks uniter (dianggap sebagai operator evolusi waktu dari Hamiltonian kuantum) untuk perkiraan vektor eigen yang diberikan.

Karena sifat ini, PEA digunakan di mana-mana

menggunakan aturan pembelajaran Widrow-Hoff; selama pembelajaran

Pada proses tersebut, vektor eigen tidak berubah sementara nilai eigen menuju ke satu [2, 6]: yaitu, $\lim_{j \rightarrow \infty} W_j$ konvergen ke QQ^T , di mana Q merepresentasikan vektor eigen dari W . Oleh karena itu, untuk input x yang diberikan, jaringan yang dipertimbangkan menghasilkan output $QQ^T x$. Pada makalah ini, kami menyajikan sebuah model implementasi kuantum untuk jaringan syaraf tiruan dengan menggunakan algoritma dalam [35]. Secara khusus, kami menunjukkan bagaimana membangun $QQ^T x$ pada komputer kuantum dalam waktu linier. Pada bagian berikut, kami memberikan deskripsi yang diperlukan tentang aturan pembelajaran Widrow-Hoff dan QPCA yang ditulis dalam [35]. Pada Bagian 3, kami akan menunjukkan bagaimana menerapkan QPCA pada jaringan syaraf yang diberikan oleh aturan pembelajaran Widrow-Hoff dan mendiskusikan isu-isu implementasi yang mungkin terjadi seperti implementasi sirkuit W , persiapan input x sebagai sirkuit kuantum, dan menentukan jumlah iterasi dalam algoritma. Pada Bagian 4, kami menganalisis kompleksitas keseluruhan aplikasi. Terakhir, di Bagian 5, sebuah contoh ilustrasi disajikan.

2 Metode

Pada bagian ini, kami akan menjelaskan aturan pembelajaran Widrow-Hoff dan algoritme kuantum yang digunakan dalam makalah ini.

2.1 Pembelajaran Widrow-Hoff

Untuk autoasociator linier, yaitu $Y = V$, $\sigma^j(V) = I$, dan $T = X$; Aturan pembelajaran Widrow-Hoff yang diberikan dalam Eq. (4),

juga dikenal sebagai algoritma LMS, dalam bentuk matriks dapat digambarkan sebagai berikut [2, 3]

$$W_{[j]} = W_{[j-1]} + \eta(X - W_{[j-1]}X)X^T. \quad (5)$$

Hal ini juga dapat dinyatakan dengan menggunakan posisi eigen dari $W = Q\Lambda Q^T$: yaitu, $W_{[j]} = Q\Phi_{[j]}Q^T$, di mana $\Phi_{[j]} = [H(I - \eta\Lambda)^j]$. $\Phi_{[j]}$ disebut matriks nilai eigen pada epoch j . Berdasarkan formulasi ini, aturan koreksi kesalahan Widrow-Hoff hanya mempengaruhi nilai eigen dan merata-ratakannya ketika $\eta \leq 2\lambda^{-1}$ (λ_{max} adalah nilai eigen terbesar dari W): yaitu, $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{[j]} = I$. Dengan demikian, pada waktu yang tak terhingga, proses pembelajaran W berakhir sebagai: $W_{[\infty]} = QQ^T$.

2.2 Algoritma Kuantum yang Digunakan dalam Model

Berikut ini, pertama-tama kami akan menjelaskan dua algoritma kuantum yang terkenal dan kemudian menjelaskan bagaimana algoritma tersebut digunakan dalam [35] untuk mendapatkan kombinasi linear dari eigenvector.

2.2.1 Algoritma Estimasi Fase Kuantum

Algoritma estimasi fase (PEA) menemukan estimasi untuk fase dari nilai eigen dari operator yang diberikan [28, 36]. Secara matematis, algoritme yang terlihat pada Gambar 1 sebagai rangkaian bekerja sebagai berikut:

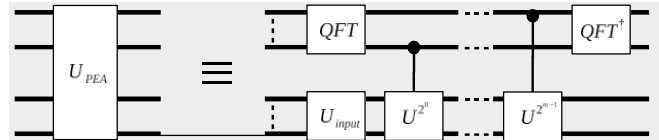
- Perkiraan vektor eigen ϕ_j yang terkait dengan nilai eigen k - j $e^{i\varphi_j}$ dari matriks uniter, U dengan orde N diasumsikan diberikan. U dianggap sebagai operator evolusi waktu dari Hamiltonian (H) yang mewakili dinamika sistem kuantum

$$U = e^{itH/\hbar}, \quad (6)$$

di mana t mewakili waktu dan \hbar adalah konstanta Planck. Akibatnya, nilai eigen dari U dan H saling berhubungan: sementara $e^{i\varphi_j}$ adalah nilai eigen dari U , fasa φ_j adalah nilai eigen dari H .

- Algoritma ini menggunakan dua register kuantum yang didedikasikan untuk nilai eigen dan vektor eigen, masing-masing, reg_1 dan reg_2 dengan m dan ($n = \log_2 N$) jumlah qubit. Keadaan awal sistem diatur ke $reg_1, reg_2 = |0\rangle_{\phi_j}$, di mana $|0\rangle$ adalah vektor basis standar pertama.
- Kemudian, transformasi Fourier kuantum diterapkan pada reg_1 , yang menghasilkan keadaan superposisi yang sama berikut ini

$$U_{QFT} |reg_1\rangle |reg_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} |k\rangle \phi_j, \quad (7)$$



Gambar 1: Bagian estimasi fase dari algoritme.

- Untuk setiap qubit ke- k dalam register pertama, operator kuantum, $U^{2^{k-1}}$, yang dikendalikan oleh qubit ini diterapkan ke register kedua. Operasi ini mengarahkan register pertama untuk menyimpan transformasi Fourier diskrit dari fase, φ_j .
- Transformasi Fourier kuantum terbalik pada register pertama menghasilkan digit biner φ_j .
- Terakhir, fase diperoleh dengan mengukur register pertama.

2.2.2 Algoritma Amplifikasi Amplitudo Kuantum

Jika sebuah keadaan kuantum ψ yang diberikan dalam ruang Hilbert N -dimensi dapat ditulis ulang dalam beberapa keadaan ortonormal yang dianggap sebagai bagian *baik* dan *buruk* dari $|\psi\rangle$ sebagai

$$|\psi\rangle = \sin(\vartheta) |\psi_{good}\rangle + \cos(\vartheta) |\psi_{bad}\rangle, \quad (8)$$

then amplitude amplification technique [8, 32, 37] can be used to increase the amplitude of $|\psi_{good}\rangle$ in magnitude while decreasing the amplitude of $|\psi_{bad}\rangle$. The technique mainly consists of two parts: the marking and the amplifying implemented by two operators, respectively U_f and U_ψ . Here, U_f marks-flips the sign of the amplitudes

of $|\psi_{good}\rangle$ and does not do anything to $|\psi_{bad}\rangle$. U_f can be applied to $|\psi\rangle$ as well as to $|\psi_{bad}\rangle$.

It is called the reflection operator when $|\psi_{good}\rangle$ and $|\psi_{bad}\rangle$ are known.

$$U_f = I - 2 |\psi_{good}\rangle \langle \psi_{good}|, \quad (9)$$

di mana I adalah matriks identitas. Pada bagian amplifikasi, amplitudo yang ditandai diperkuat dengan penerapan operator U_ψ

$$U_\psi = I - 2 |\psi\rangle \langle \psi| \quad (10)$$

Untuk memaksimalkan probabilitas $|\psi_{good}\rangle$, operasi iterasi $G = U U_\psi$ diterapkan secara iteratif $O(\sqrt{N})$ kali ke keadaan yang dihasilkan.

2.3 Analisis komponen utama kuantum

Dalam [35], kami telah menunjukkan bahwa menggabungkan PEA dengan

di mana $M = 2^m$ dan k adalah vektor basis standar ke- k .

amplifikasi amplitudo, seseorang dapat memperoleh nilai eigen dalam interval tertentu.

Pada bagian estimasi fase, keadaan awal dari register diatur ke $|0\rangle |0\rangle$. Kemudian, register kedua dimasukkan ke keadaan superposisi yang sama $1/N(1, \dots, 1)^T$. Fase Proses estimasi pada input ini menghasilkan superposisi dari nilai eigen pada register pertama dan vektor eigen pada register kedua. Pada kondisi superposisi akhir ini, amplitudo untuk pasangan eigen sebanding dengan norma proyeksi vektor input ke vektor eigen: yaitu, jumlah yang dinormalisasi dari elemen-elemen vektor eigen. Bagian ini diwakili oleh U_{PEA} dan juga melibatkan sirkuit persiapan input, U_{input} , pada register kedua.

Pada bagian amplifikasi, pertama, U_f diterapkan pada register pertama untuk menandai nilai eigen yang ditentukan oleh nilai biner dari nilai eigen: Sebagai contoh, jika kita ingin menandai nilai eigen yang sama dengan 0.25 di $|reg_1\rangle$ dengan 3 qubit, kita gunakan $U_f = I - 2|010\rangle\langle 010|$ karena bentuk biner 0,25 adalah (010) (bit paling kiri mewakili bit yang paling signifikan). Amplitudo dari nilai eigen yang ditandai kemudian diperkuat dengan aplikasi U_ψ dengan ψ mewakili output dari estimasi fase

$$|\psi\rangle = U_{PEA} |reg_1\rangle |reg_2\rangle = U_{PEA} |0\rangle |0\rangle. \quad (11)$$

Dengan menggunakan persamaan di atas, U_ψ dapat diimplementasikan sebagai

$$U_\psi = I - 2|\psi\rangle\langle\psi| = U U U_{PEA} U_{PEA}^\dagger \quad (12)$$

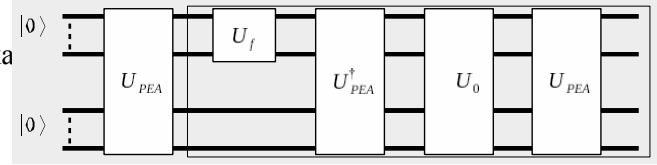
di mana $U_0 = I - 2|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|$ Amplitudo dari nilai eigen di wilayah yang diinginkan selanjutnya diperkuat dengan aplikasi berulang dari operator $G = U U_{\psi f}$. Pada akhir proses ini, kombinasi linier dari vektor eigen dengan koefisien yang ditentukan oleh jumlah ternormalisasi dari elemen-elemen vektor dari vektor eigen yang dihasilkan. Pada bagian berikut, kami akan menunjukkan bagaimana menerapkan proses ini untuk memodelkan implementasi jaringan syaraf tiruan berdasarkan aturan pembelajaran Widrow-Hoff.

3 Aplikasi pada Jaringan Saraf Tiruan

Karena matriks bobot dalam aturan pembelajaran Widrow-Hoff konvergen ke komponen utama di tak terhingga [6]: yaitu, $W_{[\infty]} = QQ^T$, perilaku jaringan yang dilatih pada beberapa input $|\mathbf{x}\rangle$ dapat disimpulkan sebagai

$$W_{[\infty]} |\mathbf{x}\rangle = QQ^T |\mathbf{x}\rangle. \quad (13)$$

Tujuan utama kami adalah menemukan cara yang efisien untuk mengimplementasikan perilaku ini pada komputer kuantum dengan



Gambar 2: Algoritma kuantum umum untuk menemukan komponen utama W . Kotak putus-putus menunjukkan iterasi penguatan amplitudo.

berada dalam keadaan $|\mathbf{0}\rangle = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)^T$. Oleh karena itu, kita perlu membuat sebuah U_f yang menandai nilai eigen yang tidak nol dan tidak melakukan apa pun terhadap $\mathbf{0}$. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan sebuah vektor \mathbf{f} dalam basis standar yang memiliki koefisien tak nol yang sama untuk semua keadaan basis kecuali yang pertama

$$U_f = I - 2|\mathbf{f}\rangle\langle\mathbf{f}|, \text{ dengan } |\mathbf{f}\rangle = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Di sini, μ adalah konstanta normalisasi yang sama dengan tidak melakukan apa pun

ketika register pertama di $|\mathbf{0}\rangle$ negara; namun, tidak hanya membalik tanda tetapi juga mengubah amplitudo dari keadaan lainnya. Kemudian, U_ψ diterapkan untuk penguatan amplitudo yang ditandai. Aplikasi berulang dari $U U_{\psi f}$ menghasilkan keadaan kuantum di mana amplitudo $\mathbf{0}$ menjadi hampir nol dan amplitudo dari keadaan lain menjadi hampir sama. Pada titik ini, register kedua menyimpan $QQ^T \mathbf{x}$ yang merupakan output yang diharapkan dari jaringan saraf. Hal ini dijelaskan dalam istilah yang lebih matematis di bawah ini.

3.1 Rincian Algoritma

Di sini, kita asumsikan bahwa $U = e^{iWt}$ diberikan: Kemudian, pada Bagian 3.4, kita juga akan membahas bagaimana U dapat diperoleh sebagai sirkuit kuantum dari matriks W yang diberikan.

Gambar 2 menunjukkan algoritme sebagai rangkaian kuantum di mana garis putus-putus menunjukkan iterasi dalam amplifikasi amplitudo. Pada awalnya, U_{PEA} diterapkan pada keadaan awal $|\mathbf{0}\rangle |0\rangle$. Perhatikan bahwa U_{PEA} termasuk juga rangkaian persiapan input, U_{input} , membawa register kedua dari keadaan $\mathbf{0}$ ke input \mathbf{x} . U_{PEA} menghasilkan superposisi dari nilai eigen dan vektor eigen yang terkait, masing-masing, pada register pertama dan kedua dengan amplitudo yang ditentukan oleh tumpang tindih vektor eigen dan input $|\mathbf{x}\rangle$

menggunakan analisis komponen utama

kuantum. Untuk tujuan ini, kami membentuk U_f dengan cara menandai hanya nilai eigen yang tidak nol dan vektor eigen yang sesuai: Untuk nilai eigen nol (dalam bentuk biner $(0 \dots 0)$), register pertama

$$|\psi\rangle = U_{PEA} |0\rangle |0\rangle = \sum_{j=0}^{D-1} \alpha_j \lambda_j \phi_j \quad (15)$$

di mana $\alpha_j = \langle \phi_j | \mathbf{x} \rangle$.

Pada bagian kedua, operator $G = U U_{\psi_f}$ diterapkan ke $|\psi\rangle$ secara iteratif hingga $Q Q^T |x\rangle$ dapat diperoleh pada register kedua. Aksi dari U_f yang diterapkan pada ψ adalah sebagai berikut

$$|\psi_1\rangle = U_f |\psi\rangle = (I - 2 \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \lambda_j \phi_j) |\psi\rangle \quad (16)$$

$$= |\psi\rangle - 2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle$$

Di sini, dengan mengasumsikan k jumlah nilai eigen pertama adalah nol, keadaan tidak ternormalisasi $|\phi^- \rangle$ didefinisikan sebagai

$$|\phi^- \rangle = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \phi_j \quad (17)$$

Sangat mudah untuk melihat bahwa $\phi^- = Q Q^T x$, yang merupakan target keluaran kita. Ketika U_{ψ} diterapkan pada keluaran dalam Persamaan (16), kita cukup mengubah amplitudo $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} U_{\psi} |\psi_1\rangle &= U_{\psi} (|\psi\rangle - 2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle) \\ &= (I - 2 \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \lambda_j \phi_j) (|\psi\rangle - 2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle) \\ &= |\psi\rangle - 2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle - 2 \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \lambda_j \phi_j |\psi\rangle + 4\mu \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \lambda_j \phi_j |f\rangle |\phi^- \rangle \\ &= (4\mu \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \lambda_j^2 - 1) |\psi\rangle - 2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

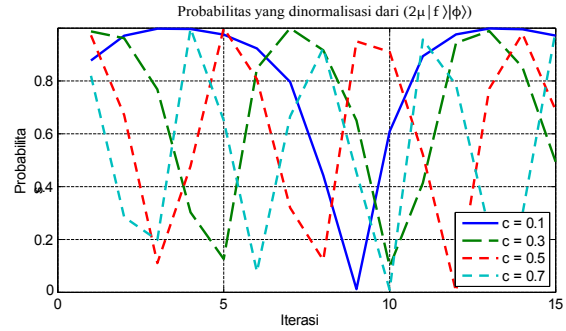
Di sini, P_f adalah probabilitas keberhasilan awal dan sama dengan

$$\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i^2. \text{ Aplikasi berulang dari } G \text{ hanya mengubah amplitudo dari } |\psi\rangle \text{ dan } |f\rangle |\phi^- \rangle: \text{ mis,}$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (c^3 - 5c^2 + 6c - 1) |\psi\rangle - (c^2 - 4c + 3) 2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle \\ G^3 |\psi\rangle &= (c^3 - 5c^2 + 6c - 1) |\psi\rangle - (c^2 - 4c + 3) 2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

di mana $c = (4\mu P_f - 1)$. Probabilitas yang dinormalisasi dari $(2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle)$ disajikan pada Gambar 3 dengan menggunakan nilai yang berbeda untuk c (Amplitudo ψ dan $(2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle)$ tidak dinormalisasi.) Amplitudo ψ melalui iterasi penguatan amplitudo beresilasi dengan frekuensi yang bergantung pada tumpang tindih input dengan eigenvektor. Ketika amplitudo ψ mendekati nol, register kedua pada bagian yang tersisa $|f\rangle |\phi^- \rangle$ adalah tepat $Q Q^T x$ dan register pertama sama dengan f .

Gambar 4 merepresentasikan iterasi algoritma untuk sebuah matriks acak $2^7 \times 2^7$ dengan $2^7/2$ jumlah nilai



Gambar 3: Probabilitas yang dinormalisasi dari $(2\mu |f\rangle |\phi^- \rangle)$ melalui iterasi untuk berbagai nilai c .

ke nol, probabilitas untuk negara bagian lainnya menjadi sama sehingga jumlah total probabilitas ini seperti yang ditunjukkan

pada gambar paling bawah dari setiap subgambar menjadi hampir satu. Pada titik tersebut, ketepatan yang ditemukan oleh $reg_2 Q Q^T x$ juga mendekati satu.

3.2 Jumlah Iterasi

Melalui iterasi, sementara probabilitas untuk $|0\rangle$ menyatakan menjadi nol, probabilitas untuk negara bagian lainnya menjadi hampir sama. Hal ini menunjukkan bahwa keadaan setiap qubit berubah menjadi keadaan superposisi yang sama. Oleh karena itu, jika keadaan qubit pada register pertama berada dalam keadaan superposisi yang hampir sama, maka probabilitas keberhasilannya sangat mungkin berada pada tingkat maksimum. Dalam pada basis Hadamard, 0 dan 1 diwakili dalam keadaan superposisi yang sama sebagai berikut

$$|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \text{ dan } |1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

eigen nol dan input acak x . Pada setiap sub-gambar, kami telah menggunakan jumlah qubit yang berbeda untuk register pertama untuk melihat efeknya pada hasil. Grafik batang pada sub-gambar menunjukkan perubahan probabilitas untuk setiap keadaan j , $j = 0, 1$, dari qubit pertama (Nada warna yang berbeda menunjukkan keadaan yang berbeda.) Ketika probabilitas untuk $|0\rangle$ menjadi dekat

Oleh karena itu, dengan menggunakan basis Hadamard, jika probabilitas pengukuran 0 mendekati satu, dengan kata lain, jika 1 tidak terlihat dalam pengukuran, maka register kedua kemungkinan besar menyimpan $QQ^T x$ dengan ketepatan maksimum. Gambar 5 menunjukkan perbandingan probabilitas qubit individu (yaitu, probabilitas untuk melihat qubit di register pertama dalam 0 dalam basis Hadamard) dengan probabilitas total yang diamati pada Gambar 4f untuk kasus acak: Seperti yang terlihat pada gambar, probabilitas individu menunjukkan perilaku yang sama dengan probabilitas total.

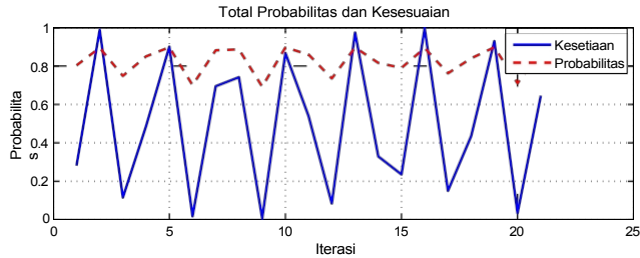
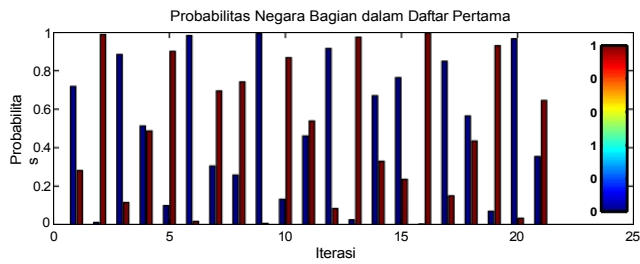
|))

|)

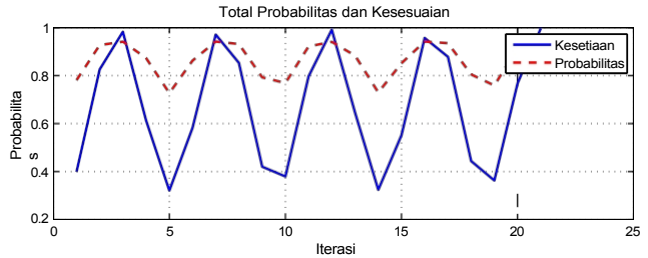
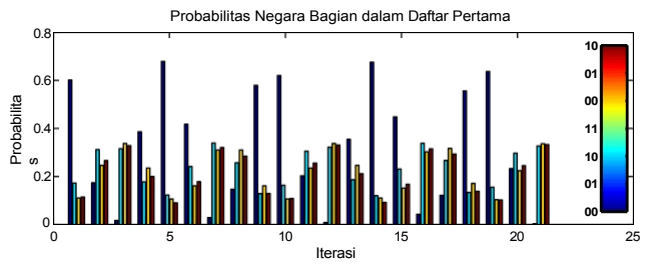
|)

Secara umum, mendapatkan kerapatan probabilitas yang mungkin dari keadaan kuantum yang tidak diketahui adalah tugas yang sulit. Namun, karena kita hanya berurusan dengan satu qubit dan tidak memerlukan kerapatan yang tepat, hal ini dapat dilakukan secara efisien. Sebagai contoh, jika 0 terlihat sebanyak n kali dalam sepuluh kali pengukuran, maka probabilitas keberhasilannya diharapkan menjadi $n/10$. Di sini, jumlah pengukuran jelas menentukan ketepatan dalam probabilitas yang diperoleh yang juga dapat mempengaruhi ketepatan.

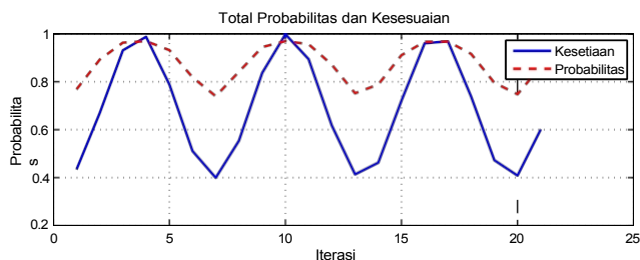
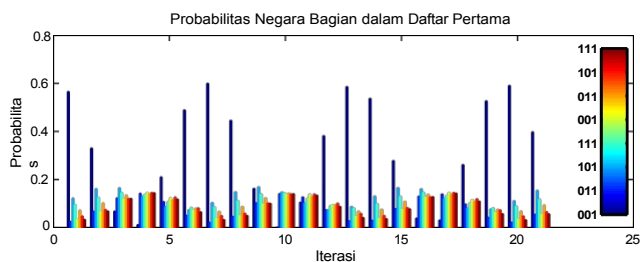
|)



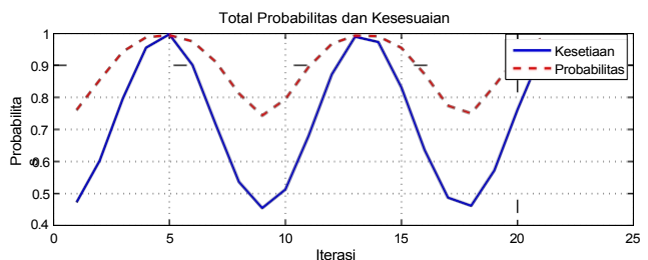
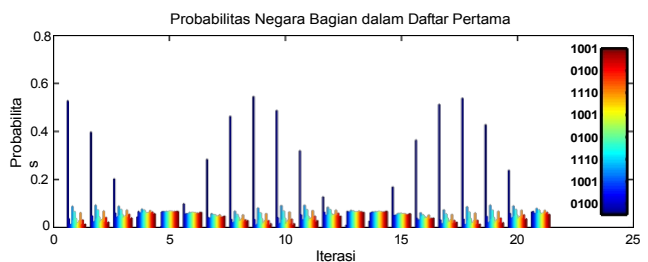
(a) m adalah 1.



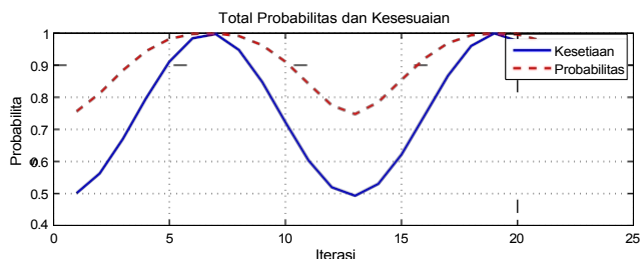
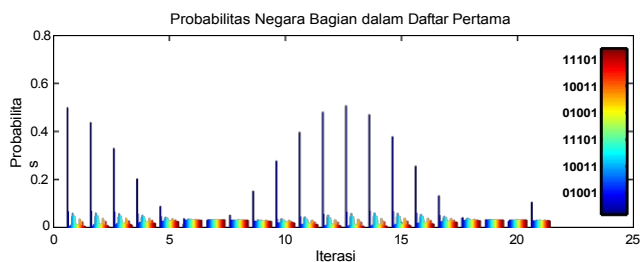
(b) m adalah 2.



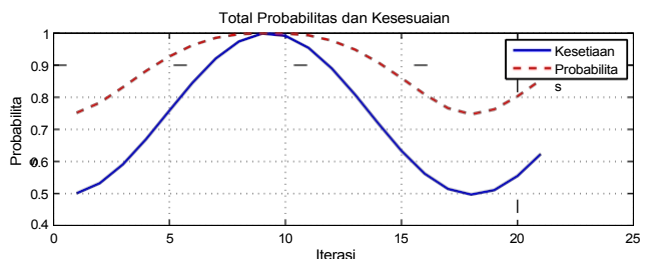
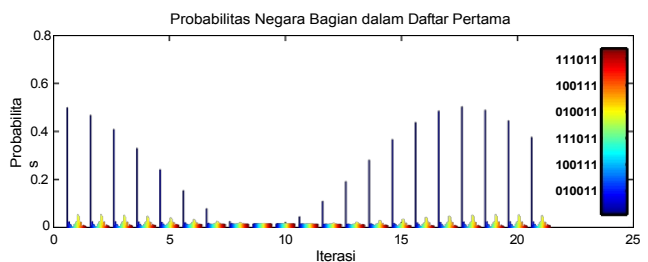
(c) m adalah 3.



(d) m adalah 4.

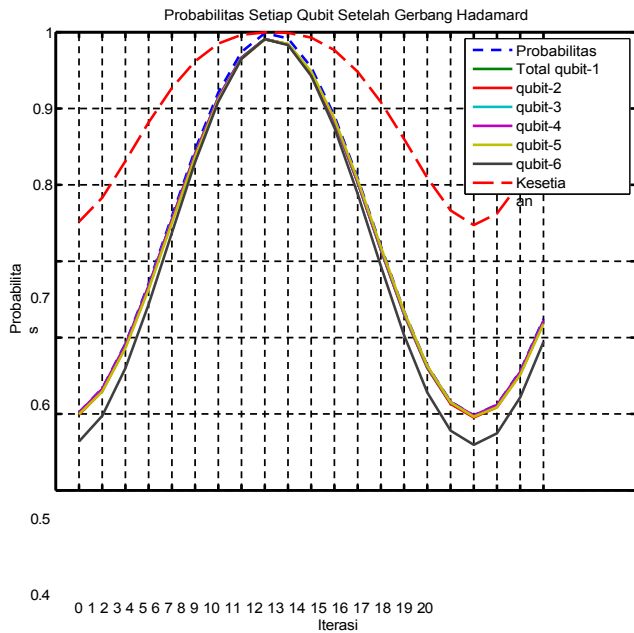


(e) m adalah 5.



(f) m adalah 6.

Gambar 4: Perubahan probabilitas dalam iterasi penguatan amplitudo untuk matriks acak $2^7 \times 2^7$ dengan $2^7 / 2$ jumlah nilai eigen nol dan input acak \mathbf{x} (kode MATLAB untuk pembangkitan acak diberikan dalam Lampiran). Pada setiap sub-gambar, kami telah menggunakan jumlah qubit yang berbeda, m , untuk register pertama untuk melihat pengaruhnya terhadap hasil. Grafik batang pada sub-gambar menunjukkan perubahan probabilitas untuk setiap keadaan $|j\rangle$, $j = 0, \dots, 1$, dari qubit pertama. Untuk setiap keadaan, nada warna yang berbeda digunakan.



Gambar 5: Probabilitas untuk melihat qubit pada register pertama di $|0\rangle$ setelah menerapkan gerbang Hadamard pada qubit dan perbandingannya dengan probabilitas total dan ketepatan yang diberikan pada Gambar 4f. Perhatikan bahwa kurva terpisah di atas adalah ketepatan. Karena hanya ada perbedaan kecil antara probabilitas pada qubit individu dan probabilitas total, kurva untuk probabilitas sebagian besar tumpang tindih.

3.3 Ketepatan-Kesalahan (Jumlah Qubit dalam $|reg_1\rangle$)

Jumlah qubit, m , pada register pertama harus cukup untuk membedakan nilai eigen bukan nol yang sangat kecil dengan nilai eigen nol. Dalam percobaan acak numerik kami, kami telah mengamati bahwa memilih hanya enam atau lima qubit saja sudah cukup untuk mendapatkan ketepatan yang sangat tinggi tanpa memerlukan jumlah iterasi yang tinggi. Dampak dari jumlah qubit pada ketepatan dan probabilitas ditunjukkan pada Gambar 4 di mana setiap sub-gambar digambar dengan menggunakan ukuran register yang berbeda untuk kasus acak yang sama. Seperti yang terlihat pada gambar, jumlah qubit juga mempengaruhi jumlah iterasi yang dibutuhkan: misalnya, untuk $m = 3$, ketepatan dan probabilitas tertinggi terlihat pada iterasi keempat; untuk $m = 6$, hal ini terjadi pada iterasi kesembilan.

3.4 Implementasi Sirkuit dari W

Implementasi rangkaian dari W membutuhkan pembentukan rangkaian kuantisasi yang merepresentasikan evolusi waktu dari W : yaitu, $U = e^{i2\pi Wt}$. Ketika W adalah matriks jarang, rangkaian dapat dibentuk dengan mengikuti metode dalam [38]. Namun, Quanta | DOI: 10.12743/quanta.v7i1.65

jenis matriks identitas dengan elemen pertama diatur ke $e^{i2\pi t}$, dan U_{x_j} adalah matriks kesatuan dengan baris dan kolom pertama sama dengan x_j . Sebagai contoh, jika dekomposisi Trotter-Suzuki orde dua diterapkan pada Persamaan (21) (perhatikan bahwa orde dekomposisi berdampak pada keakuratan aproksimasi), maka akan diperoleh

$$e^{i2\pi t} \prod_{j=1}^{\kappa} U_{x_j} \approx \prod_{j=1}^{\kappa} e^{i2\pi t \frac{x_j x_j^T}{2}} U. \quad (22)$$

Kemudian, dekomposisi yang sama diterapkan pada istilah $e^{i2\pi t \frac{x_j x_j^T}{2}}$ dalam persamaan di atas. Penguraian rekursif ini

Komposisi ini menghasilkan sebuah aproksimasi yang terdiri dari (4κ) jumlah matriks U_{x_j} . Setiap U_{x_j} dapat diimplementasikan sebagai matriks Householder dengan menggunakan operasi kuantum $O(2^n)$ yang linear dalam ukuran x_j [43-46].

ketika W tidak berbentuk sparse tetapi dalam bentuk berikut $W = x x_j x_j^T$, maka eksponensial menjadi sama dengan

$$U = e^{i2\pi Wt} = e^{i2\pi t x x_j x_j^T}. \quad (21)$$

Untuk mendekati eksponensial di atas, kami menerapkan rumus Trotter-Suzuki [39-42] untuk menguraikan Persamaan (21) ke dalam suku-suku $U_j = e^{i2\pi t x x_j^T} = U_x \Gamma U_x^\dagger$, di mana Γ adalah

3.5 Memperoleh solusi dari output

Secara umum, amplitudo vektor keluaran (keadaan fisis dari register kedua) mengkodekan informasi yang diperlukan untuk solusi masalah yang dipertimbangkan. Karena mendapatkan kepadatan penuh dari keadaan kuantum diketahui sangat tidak efisien untuk sistem yang lebih besar, kita perlu mendorong skema pengukuran yang efisien yang spesifik untuk masalah tersebut. Misalnya, untuk beberapa masalah, perbandingan nilai puncak dan bukan seluruh vektor mungkin cukup untuk mengukur kesimpulan: Dalam hal ini, karena hasil yang mungkin dalam pengukuran adalah hasil dengan amplitudo yang cenderung lebih besar daripada sebagian besar status dalam besaran, nilai puncak dapat diperoleh secara efisien. Namun, ini saja mungkin tidak cukup untuk beberapa aplikasi.

Selain itu, dalam beberapa aplikasi seperti masalah pengelompokan spektral, superposisi

j j

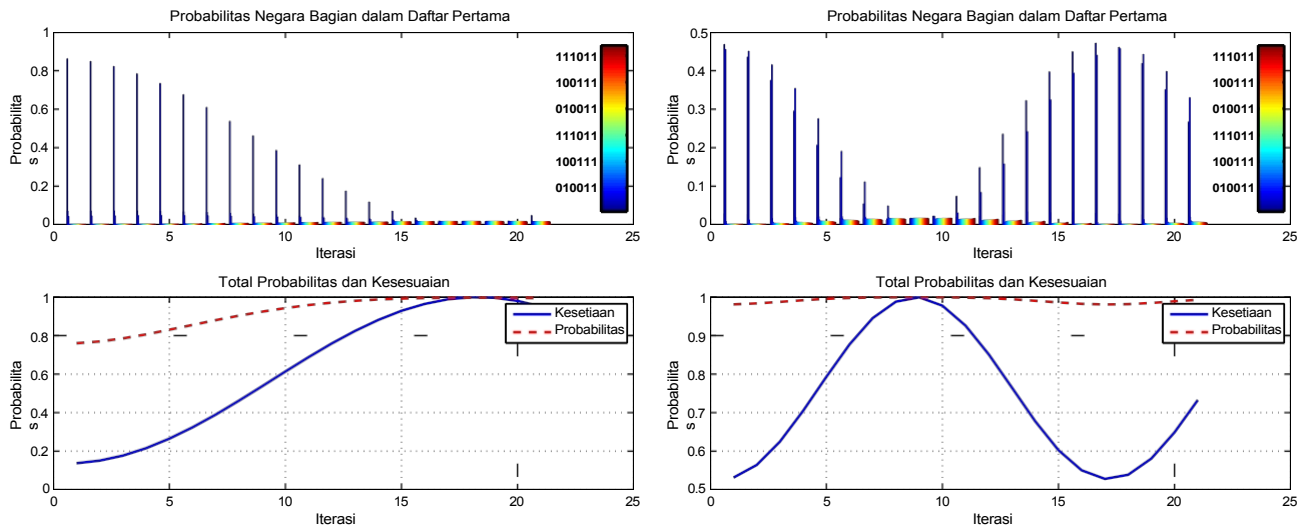
vektor yang membentuk ruang solusi untuk masalah tersebut dapat digunakan sebagai keadaan input. Dalam hal ini, pengukuran output dalam ruang solusi menghasilkan solusi untuk masalah tersebut. Metode ini dapat digunakan secara efisien (kompleksitas waktu polinomial dalam jumlah qubit) ketika vektor-vektor yang menggambarkan ruang solusi adalah produk tensor dari matriks Pauli.

4 Analisis Kompleksitas

Kompleksitas komputasi algoritma kuantum dinilai dari jumlah total gerbang tunggal dan dua gerbang terkontrol qubit NOT (CNOT) dalam sirkuit kuantum yang menerapkan algoritma tersebut. Kami mendapatkan kompleksitas komputasi dari keseluruhan metode dengan menemukan kompleksitas U_f pada register pertama dengan m jumlah qubit dan U_ψ pada register kedua dengan n jumlah qubit. Kita akan menggunakan $M = 2^m$ dan $N = 2^n$ untuk mendeskripsikan ukuran operator pada register.

Sebagai perbandingan, setiap metode klasik yang diterapkan untuk mendapatkan $QQ^T \mathbf{x}$ setidaknya membutuhkan kompleksitas waktu $O(N^2)$ karena adanya perkalian vektor matriks. Oleh karena itu, model kuantum yang disajikan di sini dapat memberikan percepatan kuadratik dibandingkan metode klasik untuk beberapa aplikasi. Ketika

Dalam simulasi untuk input acak $|\mathbf{x}\rangle$, perbandingan $W_{[\infty]} \mathbf{x} = QQ^T \mathbf{x}$ dengan output dari register kedua dalam model kuantum menghasilkan fisibilitas. Untuk dua masukan acak yang berbeda, hasil simulasi pada setiap iterasi ditunjukkan pada Gambar 6a dan Gambar 6b untuk $|\mathbf{x}\rangle = (.3517 .3058 .6136 .6374)^T$ dan $|\mathbf{x}\rangle = (.7730 .1919 .1404 .5881)^T$, masing-masing.



(a) Untuk input acak yang dibangkitkan $|x\rangle = (0.3517 \ 0.3058 \ 0.6136 \ 0.6374)^T$. (b) Untuk input acak yang dibangkitkan $|x\rangle = (0.7730 \ 0.1919 \ 0.1404 \ 0.5881)^T$.

Gambar 6: Hasil simulasi model kuantum untuk contoh pada Bagian 5 dengan dua vektor input yang berbeda.

6 Kesimpulan

Matriks bobot jaringan berdasarkan aturan pembelajaran Widrow-Hoff konvergen ke QQ^T , di mana Q merepresentasikan vektor eigen dari matriks yang berhubungan dengan nilai eigen yang tidak nol. Di sini, kami menerapkan metode analisis komponen kuantum principal yang dijelaskan dalam [35] ke jaringan saraf tiruan menggunakan aturan pembelajaran Widrow-Hoff dan menunjukkan bahwa seseorang dapat mengimplementasikan sirkuit kuantum ekuivalen yang menghasilkan output $QQ^T x$ untuk input x yang diberikan dalam waktu linier. Kami juga mendiskusikan detail implementasi dengan menggunakan kasus acak, menganalisis kompleksitas komputasi berdasarkan jumlah gerbang kuantum dan menyajikan contoh numerik sederhana. Model ini bersifat umum dan hanya membutuhkan kompleksitas komputasi waktu linier dalam ukuran matriks bobot.

vektor input yang dinormalisasi% vektor input yang dinormalisasi

```
x = rand(N,1); x = x/norm(x);
```

Lampiran: Kode MATLAB untuk Matriks Acak

Matriks acak yang digunakan dalam contoh numerik dihasilkan oleh cuplikan kode MATLAB berikut:

```
%jumlah nilai eigen tak nol npc =
ceil(N/2);
d = rand(N,1); %nilai eigen acak
d(npc+1:end) = 0;
Vektor eigen acak
[Qfull,~] =
qr(randn(N));
% matriks kesatuan dalam PEA
U = Qfull*diag(exp(1i*2*pi*d))*Qfull';
Quanta | DOI: 10.12743/quanta.v7i1.65
```

Referensi

- [1] Haykin SO. *Jaringan Syaraf Tiruan dan Pembelajaran Mesin*, edisi ke-3. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson, 2008.
- [2] Abdi H. Aljabar linier untuk jaringan syaraf. Dalam: *Ensiklopedia Nasional Ilmu Sosial dan Perilaku*. Baltes PB (editor), Oxford: Pergamon, 2001, hlm. 8864-8868. doi: 10.1016 / B0-08- 043076-7 / 00609-4
- [3] Abdi H, Valentin D, Edelman B, O'Toole AJ. Lebih lanjut tentang perbedaan antara pria dan wanita: evi- densi dari jaringan saraf linier dan pendekatan komponen utama. *Persepsi* 1995; **24**(5): 539-562. doi: 10.1068/p240539
- [4] Morris RGM. D. O. Hebb: Organisasi Perilaku, Wiley: New York; 1949. *Buletin Penelitian Otak* 1999; **50** (5): 437. doi: 10.1016/S0361-9230(99)00182-3
- [5] Widrow B, Hoff ME. Rangkaian peralihan adaptif. Masuk: *Komputasi saraf: Dasar-dasar Penelitian*. Anderson JA, Rosenfeld E (editor), Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1988, pp. 123-134.
- [6] Abdi H, Valentin D, Edelman B, O'Toole AJ. Aturan pembelajaran Widrow-Hoff untuk generalisasi asosiasi otomatis linier. *Jurnal Psikologi Matematika* 1996; **40**(2): 175-182. doi: 10.1006/ jmps.1996.0017
- [7] Shor PW. Algoritma untuk komputasi kuantum: logaritma diskrit dan pempfaktoran. Prosiding dari

Symposium Tahunan ke-35 tentang Dasar-dasar Ilmu Komputer, November, 20-22, hal. 124-134. doi:10.1109/sfcs.1994.365700

- [8] Grover LK. Algoritma mekanika kuantum yang cepat untuk pencarian basis data. *Prosiding simposium ACM tahunan ke-28 tentang Teori Komputasi*, Philadelphia, Pennsylvania, 22-24 Mei 1996, Asosiasi Mesin Komputasi, hal. 212-219. doi:10.1145/237814.237866
- [9] Neven H, Denchev VS, Rose G, Macready WG. *Melatih pengklasifikasi biner dengan algoritma quantum adiabatik*. 2008. arXiv:0811.0416
- [10] Neven H, Denchev VS, Rose G, Macready WG. *Melatih pengklasifikasi skala besar dengan algoritma adiabatik kuantum*. 2009. arXiv:0912.0779
- [11] Aïmeur E, Brassard G, Gambs S. Kecepatan kuantum untuk pembelajaran tanpa pengawasan. *Pembelajaran Mesin* 2013; **90**(2): 261-287. doi: 10.1007/s10994-012-5316-5
- [12] Lloyd S, Garnerone S, Zanardi P. Quantum algoritma untuk analisis topologi dan geometrik data. *Komunikasi Alam* 2016; **7**(10138). arXiv: 1408.3106, doi: 10.1038/ncomms10138
- [13] Rebentrost P, Mohseni M, Lloyd S. Mesin vektor pendukung Quantum untuk klasifikasi data besar. *Physical Review Letters* 2014; **113**(13): 130503. arXiv:1307.0471, doi:10.1103/PhysRevLett.113.130503
- [14] Wittek P. *Pembelajaran Mesin Kuantum: Apa Arti Komputasi Kuantum bagi Penambangan Data*. Amsterdam: Academic Press, 2014.
- [15] Schuld M, Sinayskiy I, Petruccione F. Komputasi kuantum untuk klasifikasi pola. *Prosiding Konferensi Internasional Lingkar Pasifik tentang Kecerdasan Buatan 2014: Tren Kecerdasan Buatan*, Cham, Pham DN, Park SB (editor), Springer, hlm. 208-220. arXiv: 1412.3646, doi: 10.1007/978-3-319-13560-1_17
- [16] Lloyd S, Mohseni M, Rebentrost P. Analisis komponen prinsipal kuantum. *Nature Physics* 2014; **10** (9): 631-633. arXiv: 1307.0401, doi: 10.1038/nphys3029
- [17] Manju A, Nigam MJ. Aplikasi kecerdasan komputasi yang diilhami kuantum: sebuah survei. *Artificial Intelligence Review* 2014; **42**(1): 79-156. doi:10.1007/s10462-012-9330-6
- [18] da Silva AJ, Ludermer TB, de Oliveira WR. Quantum perceptron di atas bidang dan pemilihan arsitektur jaringan saraf dalam komputer kuantum. *Jaringan Saraf* 2016; **76**: 55-64. arXiv: 1602.00709, doi:10.1016/j.neunet.2016.01.002
- [19] Zhou R, Wang H, Wu Q, Shi Y. Jaringan saraf asosiatif kuantum dengan algoritma pencarian nonlinier. *Jurnal Internasional Fisika Teoretis* 2012; **51**(3): 705-723. doi: 10.1007/s10773-011-0950-4
- [20] Gupta S, Zia RKP. Jaringan saraf kuantum. *Jurnal Ilmu Komputer dan Sistem* 2001; **63**(3): 355-383. doi:10.1006/jcss.2001.1769
- [21] Andrecut M, Ali MK. Model kerja jaringan saraf kuantum. *Jurnal Internasional Fisika Modern C* 2002; **13**(1): 75-88. doi: 10.1142/S0129183102002948
- [22] Altaisky MV. *Jaringan saraf kuantum*. 2001. arXiv:quant-ph/0107012
- [23] Schuld M, Sinayskiy I, Petruccione F. Jalan-jalan kuantum pada grafik yang mewakili pola penembakan jaringan saraf kuantum. *Physical Review A* 2014; **89**(3): 032333. arXiv: 1404.0159, doi: 10.1103/PhysRevA.89.032333
- [24] Schuld M, Sinayskiy I, Petruccione F. Pencarian jaringan saraf kuantum. *Pemrosesan Informasi Kuantum* 2014; **13** (11): 2567-2586. arXiv: 1408.7005, doi:10.1007/s11128-014-0809-8
- [25] Kouda N, Matsui N, Nishimura H, Peper F. Jaringan saraf qubit dan efisiensi pembelajarannya. *Komputasi dan Aplikasi Neural* 2005; **14**(2): 114-121. doi:10.1007/s00521-004-0446-8
- [26] Li P, Xiao H, Shang F, Tong X, Li X, Cao M. Jaringan saraf hibrida yang terinspirasi oleh kuantum dengan input sequence. *Komputasi saraf* 2013; **117**: 81-90. doi: 10.1016/j.neucom.2013.01.029
- [27] Ventura D, Martinez T. Memori asosiatif kuantum berdasarkan algoritma Grover. *Prosiding Jaringan Syaraf Tiruan dan Algoritma Genetika*, Wina, Dobnikar A, Steele NC, Pearson DW, Albrecht RF (editor), Springer, hlm. 22-27. doi: 10.1007/978-3-7091-6384-9_5

- [28] Kitaev AY. Pengukuran kuantum dan Masalah Penstabil Abelian. *Electronic Colloquium on Computational Complexity* 1996; **3**: TR96-003. arXiv: quant-ph/9511026, <https://eccc.weizmann.ac.il/report/1996/003>
- [29] Harrow AW, Hassidim A, Lloyd S. Quantum algoritma untuk sistem persamaan linear. *Physical Review Letters* 2009; **103**(15): 150502. arXiv: 0811.3171, doi:10.1103/PhysRevLett.103.150502
- [30] Grover LK. Komputer kuantum dapat mencari dengan cepat dengan menggunakan hampir semua transformasi. *Physical Review Letters* 1998; **80**(19): 4329-4332. arXiv:quant-ph/9712011, doi:10.1103/PhysRevLett.80.4329
- [31] Mosca M. Pencarian kuantum, penghitungan dan amplifikasi amplitudo dengan analisis vektor eigen. In: *Lokakarya MFCS'98 tentang Algoritma Acak*. 1998, pp. 90-100.
- [32] Brassard G, Høyer P, Mosca M, Tapp A. Amplifikasi dan estimasi amplitudo kuantum. Dalam: *Komputasi dan Informasi Kuantum*. Lomonaco Jr SJ, Brandt HE (editor), Contemporary Mathematical, vol. 305, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2002, hal. 53-74. arXiv: quant-ph/0005055, doi:10.1090/conm/305
- [33] Chen CL, Dong DY, Chen ZH. Komunikasi kuantum untuk pemilihan tindakan menggunakan pembelajaran penguatan. *Jurnal Internasional Informasi Kuantum* 2006; **4**(6): 1071-1083. doi: 10.1142/S0219749906002419
- [34] Dong D, Chen C, Li H, Tarn TJ. Pembelajaran penguatan kuantum. *Transaksi IEEE tentang Sistem, Manusia, dan Sibernetika, Bagian B (Sibernetika)* 2008; **38**(5): 1207-1220. doi:10.1109/tsmcb.2008.925743
- [35] Daskin A. Memperoleh kombinasi linier dari komponen utama matriks pada komputer kuantum. *Pemrosesan Informasi Kuantum* 2016; **15**(10): 4013-4027. arXiv:1512.02109, doi:10.1007/s11128-016-1388-7
- [36] Nielsen MA, Chuang IL. *Komputasi Kuantum dan Informasi Kuantum*, edisi Ulang Tahun ke-10. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [37] Brassard G, Hoyer P. Algoritma waktu polinomial kuantum yang eksak untuk masalah Simon. *Prosiding Prosiding Simposium Israel Kelima pada Teori Komputasi dan Sistem*, 17-19 Juni 1997, hal. 12-23. arXiv:quant-ph/9704027, doi: 10.1109/istcs.1997.595153
- [38] Berry DW, Ahokas G, Cleve R, Sanders SM. Algoritma kuantum yang efisien untuk mensimulasikan Hamiltonian yang jarang. *Komunikasi dalam Fisika Matematika* 2007; **270**(2): 359-371. arXiv:quant-ph/0508139, doi: 10.1007/s00220-006-0150-x
- [39] Trotter HF. Pada hasil kali semi-kelompok operator. *Prosiding Masyarakat Matematika Amerika* 1959; **10**(4): 545-551. JSTOR:2033649, doi:10.1090/S0002-9939-1959-0108732-6
- [40] Suzuki M. Formula Trotter yang digeneralisasi dan aproksimasi sistematis operator eksponen dan turunan dalam dengan aplikasi pada masalah banyak benda. *Komunikasi dalam Fisika Matematika* 1976; **51**(2): 183-190. doi:10.1007/bf01609348 <https://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103900351>
- [41] Hatano N, Suzuki M. Menemukan rumus produk eksponensial dengan orde yang lebih tinggi. Dalam: *Quantum Annealing dan Metode Optimasi Lainnya*. Das A, K. Chakrabarti B (editor), Lecture Notes in Physics, vol. 679, Berlin: Springer, 2005, hlm. 37-68. arXiv: math-ph/0506007, doi: 10.1007/11526216_2
- [42] Poulin D, Hastings MB, Wecker D, Wiebe N, Doberty AC, Troyer M. Ukuran langkah Trotter diperlukan kembali untuk simulasi kuantum yang akurat dari Kimia kuantum. *Informasi dan Komputasi Kuantum* 2015; **15**(5-6): 361-384. arXiv: 1406.4920
- [43] Ivanov PA, Kyoseva ES, Vitanov NV. Rekayasa transformasi $U(N)$ sembarang dengan refleksi Householder kuantum. *Physical Review A* 2006; **74**(2): 022323. arXiv:0708.2811, doi: 10.1103/PhysRevA.74.022323
- [44] Urías J, Quiñones DA. Metode rumah tangga untuk desain sirkuit kuantum. *Jurnal Fisika Kanada* 2015; **94**(2): 150-157. doi: 10.1139/cjp-2015-0490
- [45] Ivanov PA, Vitanov NV. Sintesis transformasi uniter sewenang-wenang dari keadaan kolektif ion-ion yang terperangkap oleh refleksi Householder kuantum. *Ulusan Fisiologi A* 2008; **77**(1): 012335. doi: 10.1103 /

- [46] Bullock SS, O'Leary DP, Brennen GK. Sirkuit kuantum yang benar-benar optimal untuk sistem tingkat-d. *Physical Review Letters* 2005; **94**(23): 230502. arXiv:quant-ph/0410116, doi:10.1103/PhysRevLett.94.230502
- [47] Daskin A, Grama A, Kollias G, Kais S. Skema sirkuit kuantum yang dapat diprogram universitas untuk mengemulasi operator. *Jurnal Fisika Kimia* 2012; **137**(23): 234112. arXiv: 1204.3600, doi: 10.1063/1.4772185
- [48] Aharonov D, Ta-Shma A. Pembangkitan keadaan kuantum adiabatik dan pengetahuan nol statistik. Prosiding *simposium ACM tahunan ke-35 tentang Theory of Computing*, San Diego, California, 9-11 Juni 2003, Association for Computing Machinery, hal. 20-29. arXiv:quant-ph/0301023, doi: 10.1145/780542.780546
- [49] Childs AM, Kothari R. Mensimulasikan Hamiltonian yang jarang dengan dekomposisi bintang. Dalam: *Teori Komputasi, Komunikasi, dan Kriptografi*. van Dam W, Kendon VM, Severini S (penyunt.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 6519, Berlin: Springer, 2011, pp. 94-103. arXiv:1003.3683, doi:10.1007/978-3-642-18073-6_8
- [50] Castelvecchi D. Komputer kuantum siap melompat keluar dari laboratorium pada tahun 2017. *Nature* 2017; **541** (7635): 9-10. doi: 10.1038/541009a
- [51] Abdi H, Valentin D, Edelman B. *Jaringan Syaraf. Aplikasi Kuantitatif dalam Ilmu Sosial*, vol. 124, Thousand Oaks, California: SAGE Publications, 1998.